Esercizio 7

Calcolare il flusso del campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{i}_1 + xy\,\overrightarrow{i}_2 + z\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso la superficie

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

<u>Passo 1: rappresentazione cartesiana di $\mathcal{S}$.</u> Ottengo la rappr. cartesiana <u>esplicita</u> di $\mathcal{S}$ imponendo

$$0 \leq z = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

quindi

$$S: \; z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2, \\ \text{con } (x,y) \in T = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \; x^2 + y^2 \leq 1\Big\}.$$

<u>Passo 2: versore normale a $\mathcal{S}$.</u> Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \end{cases}$$

da cui

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\left(2x\overrightarrow{i}_1 + 2y\overrightarrow{i}_2 + 1\overrightarrow{i}_3\right)$$

<u>Passo 3: calcolo il flusso.</u> Quindi

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_T \overrightarrow{F}(x,y,f(x,y))\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i}_1 - \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{i}_2 + 1\overrightarrow{i}_3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_T \left(xy, xy, 1-x^2-y^2\right)\cdot(2x, 2y, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_T \left(2x^2y + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

• Osservo che T è simmetrico rispetto a entrambi gli assi e

$$\begin{cases} (x,y) \mapsto 2x^2y & \text{dispari in } y, \\ (x,y) \mapsto 2xy^2 & \text{dispari in } x, \end{cases}$$

quindi

$$\iint_T (2x^2y + 2xy^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

• Passando alle coordinate polari (T è un disco chiuso!), calcolo

$$\begin{aligned} \iint_T (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\,d\rho \right) d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\,d\rho \\ &= \ldots = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$